教科書と現場のインターフェース

合点！電子回路入門

石井 聡
Satoru Ishii

第7回 電子回路の計算ツール…複素数（その2）

電子回路自体は，足す/引く/掛ける/割るを基本として動いています．別に複素数で動いているわけではありません．回路計算に複素数を使うため「回路はとても難しい動きをしているんだろう」と錯覚しがちですが，それは違います．回路計算で複素数が用いられるのは，数式上での計算を簡単に取り扱えるようにするための，計算方法の置き換えなのです．

そして「複素数というツール」の使い方がわかった時点で，単純と思われるオームの法則で，交流回路と，その交流回路での「電流を妨げる量」であるインピーダンスの計算をすべて制覇することができるのです．

今回は，実際の複素数の表記方法と計算について考えていきます．

コイル/コンデンサのリアクタンス量を $e^{j\theta}$ で表す

リアクタンス X はインピーダンス Z の一要素です．リアクタンスは一般的に記号 X が用いられ，単位はオーム［Ω］です．リアクタンスは $e^{j\theta}$ ではどうなるでしょうか．あらためて**図7-1**に，コイル，コンデンサ（リアクタンス量 X_L，X_C となる）に加わる電圧 V と，流れる電流 I の関係を示しておきます．電圧 V，電流 I は実際の大きさでなく記号 V，I で示してあります．

● 電流の位相が π/2 rad 遅れているコイルでは…

コイルは**図7-1(a)**や同図**(c)**のように，電流 I の位相が電圧 V に対して $\pi/2$ rad 遅れています．これを，

$$I = V/X_L$$

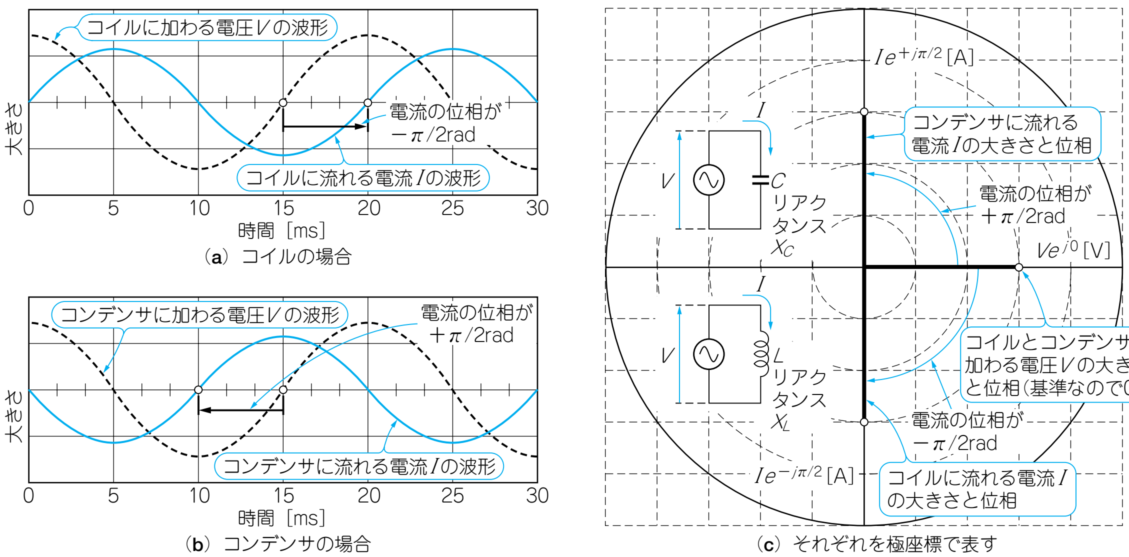
$$Ve^{j0}\ [\mathrm{V}] \Rightarrow \text{オームの法則} \Rightarrow Ie^{-j\pi/2}\ [\mathrm{A}]$$

として，電流を妨げる要素として電圧と電流の関係をつないでみると，

$$\frac{Ve^{j0}\ [\mathrm{V}]}{[\text{リアクタンス}\ X_L\ \text{の大きさ}]\ e^{+j\pi/2}\ [\Omega]} = Ie^{-j\pi/2}\ [\mathrm{A}] \quad \cdots\cdots (7\text{-}1)$$

［リアクタンス X_L の大きさ］$\Rightarrow V/I \Rightarrow 2\pi fL \Rightarrow$ 単なる「大きさ」のみ

$e^{+j\pi/2} \Rightarrow$ 位相を $+\pi/2$ rad 変化させる定型フォ



（a）コイルの場合

（b）コンデンサの場合

（c）それぞれを極座標で表す

図7-1　コイル/コンデンサに加わる電圧と流れる電流の関係（周波数は50 Hz）

極形式（極座標）▶信号の大きさと位相を，同心円の基準線を使って，大きさを中心からの距離，位相を中心から（右側の方向をゼロとして）反時計方向の角度として，一つの点として表したもの．

コラム1　波形を表す cos θ の式で同じように位相量を変換できるか

前回の(公式1)のように定型フォームは，

$$e^{j(\theta 1+\theta 2)}=e^{j\theta 1}\times e^{j\theta 2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7\text{-}A)$$

と $e^{j\theta}$ の形のままで，θの部分だけを変化させることができます．一方 cos θ では，

$$\cos(\theta_1+\theta_2)$$
$$=\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(7\text{-}B)$$

とθの部分だけを変えることができず，このように複雑な sin，cos の組み合わせの形になってしまいます(三角関数の加法定理)．

実際の信号の動きとしては，この cosθ の式のままで動いているのですが，計算上での扱いが面倒になるので，$e^{j\theta}$ の形に置き換えて，数式上での回路計算を簡単に取り扱えるようにしています．

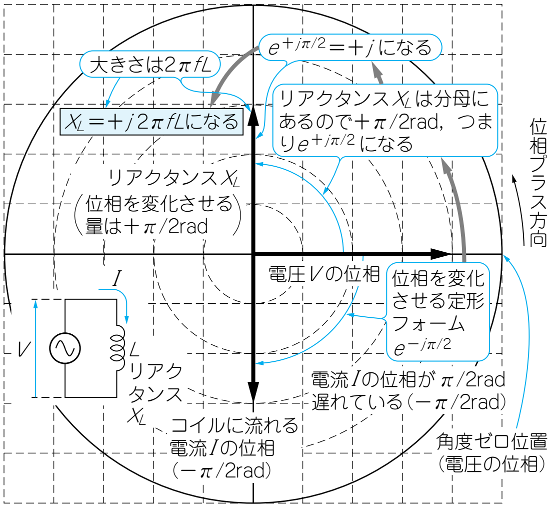


図7-2　コイルに加わる電圧 V と流れる電流 I を極座標で示し，コイルのリアクタンス X_L の $e^{+j\pi/2}$＝＋j を説明する

ームの一つ

と考えることができます．$e^{-j\pi/2}$で，電流Iの位相がπ/2 rad 遅れていることを表しています．

リアクタンス X_L は分母にあります． 電流Iとリアクタンス X_L とは逆数の関係なので，11月号の p.219の(公式2)のように電流Iの位相は−π/2 rad ですが，**jθの部分の符号が(位相量のプラス/マイナスが)反対の $e^{+j\pi/2}$ になっています．**

▶ コイルの $e^{+j\pi/2}$ は“＋j”だけで表される

コイルのリアクタンス X_L は**図7-2**のように，

$$X_L=［X_L\text{の大きさ}］\times e^{+j\pi/2}$$
$$=+j\times［X_L\text{の大きさ}］=+j2\pi fL \quad \cdots(7\text{-}2)$$

と $e^{+j\pi/2}=+j$ になります(稿末のコラム2を参照)．単純な虚数＋j($j=\sqrt{-1}$)だけが残ります．つまり定型フォームでの＋π/2 rad(90°)というのは，虚数＋jだけで示されます(これは以降の実際の計算でもとても重要なこと)．

● 電流の位相がπ/2 rad 進んでいるコンデンサでは…

コンデンサは**図7-1(b)**や同図(**c**)のように，電流Iの位相が電圧Vに対してπ/2 rad 進んでいます．これも，

$$I=V/X_C$$

Ve^{j0}［V］⇒オームの法則⇒$Ie^{+j\pi/2}$［A］

と，電流を妨げる要素として電圧と電流の関係をつないでみると，

$$\frac{Ve^{j0}\ [V]}{［リアクタンスX_Cの大きさ］e^{-j\pi/2}\ [\Omega]}$$
$$=Ie^{+j\pi/2}\ [A] \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7\text{-}3)$$

［リアクタンス X_C の大きさ］⇒ V/I ⇒ $1/2\pi fC$

⇒単なる「大きさ」のみ

$e^{-j\pi/2}$ ⇒位相を−π/2 rad 変化させる定型フォームの一つ

と考えることができます．$e^{+j\pi/2}$で，電流Iの位相がπ/2 rad 進んでいることを表しています．

コイルと同様に，**リアクタンス X_C は分母にあり，jθの符号が反対の $e^{-j\pi/2}$ になっています．**

▶ コンデンサの $e^{-j\pi/2}$ は“−j”だけで表される

コイルの場合と同様に，コンデンサのリアクタンス X_C も**図7-3**のように，

$$X_C=［X_C\text{の大きさ}］\times e^{-j\pi/2}$$
$$=-j\times［X_C\text{の大きさ}］=-j\frac{1}{2\pi fC} \quad \cdots(7\text{-}3)$$

と $e^{-j\pi/2}=-j$ になり，虚数の−jだけが残ります．定型フォームでの−π/2 rad(90°)というのは，虚数−jだけで示されます．

$e^{j\theta}$ の定型フォームと現実の回路素子でのインピーダンスとのつながりを考える

［Zの大きさ］× $e^{j\theta}$ と現実の回路素子とが，どのように関係づけられるのかをさらに示していきましょう．

ここでの話の説明順序としては，①極座標から XY 方向それぞれの大きさを考える($e^{j\theta}$ から実際の回路へのアプローチ)，②それを逆向きに考える(実際の回路から $e^{j\theta}$ へのアプローチ)となっていますので，これをまず頭に入れておいてください(「X方向」の X はリアクタンスではないので注意のこと)．

● $e^{j\theta}$ の定型フォームと実際のインピーダンスとのつながりを考えるうえでの前提

以降の説明の前提として，**図7-4(a)**の直列回路を考えます．

実効値▶電力の計算も含めて，直流回路とまったく同じようにオームの法則で取り扱うための大きさ．正弦波での値はピーク値の $1/\sqrt{2}$ 倍となる．