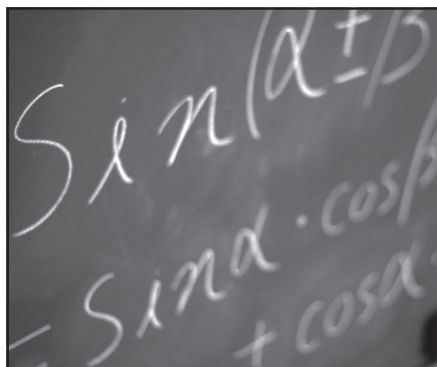


短期連載



ディスクリート部品で作る無線用位相差測定器 the 定番アナログ乗算器 AD633 活用のススメ

【第3回】 フーリエ級数展開を用いた 正弦波の実効値回路

足立 克 Masaru Adachi

これまで2回にわたって、アナログ乗算器と、それを応用した除算器の構成法について述べました。実効値が E_1 および E_2 で、位相差が ϕ の2つの正弦波 $E_1 \cos \omega t$ と $E_2 \cos(\omega t + \phi)$ の積を出力し、その積 $E_1 E_2 \cos \phi$ を被除数とし、除数を $E_1 E_2$ として割れば、除算器の出力は $\cos \phi$ となっており、正弦波の実効値が変化しても影響を受けないことを説明しました。 $\cos \phi$ が求まれば位相差測定器になります。

このような位相差測定器を作るには、2つの正弦波の実効値 E_1 および E_2 について、実効値に相当する直流電圧を得る回路(実効値回路)が必要です。

今回は、絶対値回路を使った正弦波の実効値回路を作ります。絶対値回路を通った信号振幅は、入力信号の実効値とどのような関係にあるのでしょうか。これを求めるには、フーリエ級数を使うと便利です。

必要なフーリエ級数展開のおさらい

革命期のフランスで活躍した偉大な数学者、ジョゼフ・フーリエは、1812年にフーリエ級数を発表しました。彼は、熱伝導に関する研究にこの方法を導入しました。当時、電気分野では、ボルタが電池を発明し(1800年)、それまでの静電気と違って連続的に電流を取り出すことにより成功したばかりでした。今日のように、フーリエ級数を応用して電圧や電流の挙動を解析するようになったのはずっと後のことです。

フーリエ級数を導入すると、どのように複雑な信号でも、整数倍の周期をもつ単純な $\sin$ 波と $\cos$ 波に分解でき、高校で学習する三角関数と積分の知識があれば十分に理解できます。信号処理の過程では、入力を意図的に歪ませて新たな信号成分を生成することがよくありますが、そうすることによって、どのような周波数の成分がどのくらいの大きさを生成されるかを計算する際に、このフーリエ級数が絶大な威力を発揮します。今回製作する絶対値回路や実効値回路の動作原理も、フーリエ級数を用いれば理解できます。

● フーリエ級数とは

信号処理においては、周期的に変化するさまざまな信号を取り扱いますが、それらの信号はどのように複雑であっても、式(1)のように整数倍の周期をもつ単純な $\sin$ 波と $\cos$ 波に分解することができます。これをフーリエ級数展開といいます。

つまり、時間の関数 $f(t)$ は、

$$f(t) = a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + a_3 \cos 3\omega t \cdots + \frac{a_0}{2} + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + b_3 \sin 3\omega t \cdots$$

という無限に続く三角級数で表せるというわけです。総和記号を用いてこの式をスッキリとした形で表現すると、次のように、直流成分 $a_0/2$ と、整数倍の周波数をもつ $\sin$ 波と $\cos$ 波の3つの成分に分解できます。

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \cdots \cdots (1)$$

$f(t)$ は、三角波、台形波、半波整流波、パルス波など、どんなに複雑な波形でもかまいません。

これをわかりやすくイメージ図で示すと図1のようになり、複雑な波形をしたひずみ波が基本波と高調波成分に分解されることがわかります。幸いなことに、現代はExcelのような表計算ソフトウェアがあるので、フーリエ級数展開した結果を容易に検証できます。

その一例として、方形波をフーリエ級数展開し、基本波と第3高調波、第5高調波を合成した結果を図2に示します。実際はこの後に、第7、第9、…と無限に高調波を足し合わせなければなりません。この図を見てもわかるように、第5高調波で打ち切った場合でも方形波に近い形になっていることがわかります。

● フーリエ係数を求める

フーリエ級数展開で最も重要な作業は、式(1)の各係数である a_n と b_n を求めることです。これら2つの係数をフーリエ係数と呼び、次式で求められます。

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t dt \cdots \cdots (2)$$