教科書と現場のインターフェース

# 合点！電子回路入門

石井 聡
Satoru Ishii

## 第6回 電子回路の計算ツール…複素数(その1)

今回から3回に分けて，複素数について説明します．ここで回路理論の勉強に挫折する人も多いと思われます．そこで本稿では，複素数自体の数学的な考え方を説明するよりも，実際に複素数を利用する目的である，インピーダンスや位相とのつながり/使い方に的を絞って説明していきます．

実際問題，回路は複素数で動いているわけではありません．われわれプロの電子回路設計技術者が行う回路計算で，複素数は計算を正確かつ簡単に数式上で取り扱えるようにするためのツールのようなものです．

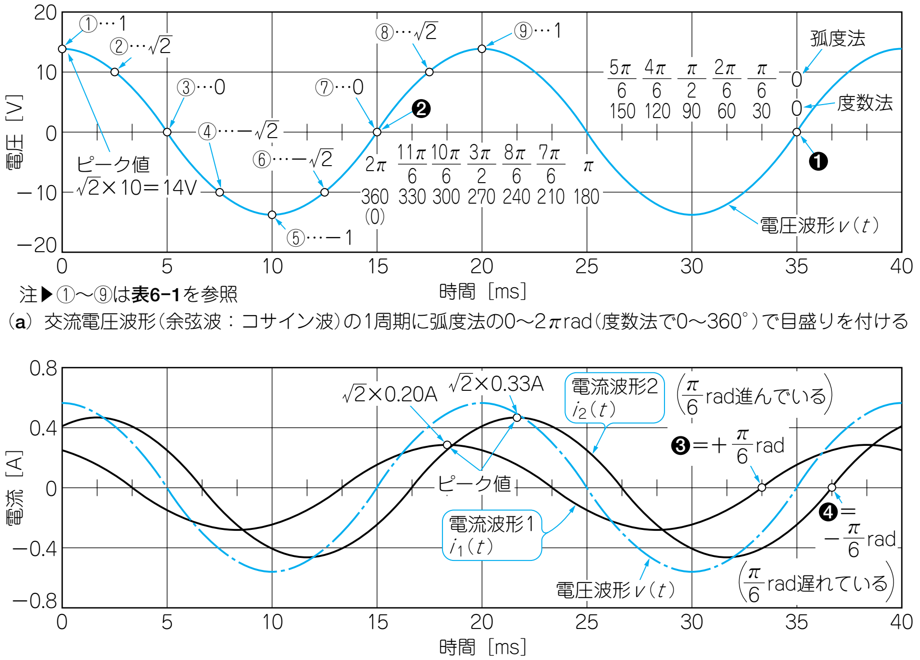
複素数というツールの使い方がわかった時点で，単純と思われるオームの法則で，交流回路とインピーダンスの計算をすべて制覇することができるのです．

まず今回は，複素数での極座標形式 $e^{j\theta}$（定型フォームという考えで説明をする）について掘り下げていきます．今の時点では「複素数とは何か」「虚数とは何か」は理解していなくてもかまいません．途中で少しずつ示していきます．

### 交流電圧/電流波形と位相のおさらい

位相は，同じ周期の二つの波形の時間的な位置ずれです．電圧と電流の時間的な相互関係を表すことが一般的といえるでしょう．また回路の入力と出力の間の，周波数ごとの相対関係を「周波数特性」として増幅度とともに示すことにも使われます．

「位置ずれ」という表現でもわかるように，位相という量は，絶対的な量，例えば1 mとか1 kgとかいう量ではありません．相対的な差(時間的な位置ずれ)を示す量です．




(a) 交流電圧波形(余弦波：コサイン波)の1周期に弧度法の0～2πrad(度数法で0～360°)で目盛りを付ける

(b) 位相がπ/6rad(30°)進んでいる電流波形 $i_1(t)$ と遅れている $i_2(t)$ を図中に重ねる

**図6-1 目盛りを振って二つの波形を比較する…それが位相になる**(周波数は50 Hz)

*e*▶ 自然対数の底．ネイピア数と呼ばれ，次式で定義される．
$e = \lim_{n\to\infty}(1 + 1/n)^n = 2.71828\cdots$

## ● 交流波形を数式で表しておく

**図6-1**(**a**)のような交流電圧波形(余弦波;コサイン波)$v(t)$を式で表すと，次のようになります．

$$v(t)=\sqrt{2}\times\underbrace{10}_{V}\times\cos(2\pi\underbrace{50}_{f}t)\ [\mathrm{V}]\ \cdots\cdots\cdots(6-1)$$

ここで，$V$は実効値［V］(RMS;root mean squareの略で実効値のこと．また$V=10$ Vで，図中ではピーク値が$\sqrt{2}$倍で14 Vになっている)，$\pi$は円周率(3.1415…)，$f$は周波数［Hz］($f=50$ Hzとしている．周期にすれば20 ms)，$t$は時間［sec］です．

波形の式と実効値の$V$とを区別するために，波形の式は$v(t)$と小文字にしています．電流も$i(t)$としています．

### ▶角度は0～2πradという弧度法で表記する

0～2πが入っているのは弧度法(0～2πrad;radは「ラジアン」と読む)で表記されているためで，cos $\theta$という関数への入力変数$\theta$として「$\theta$を弧度法で表現するのか，度数法(0～360°)にするのか？」の答えとして「弧度法で表現する」というだけのことです．cos30°でもかまいませんが，$e^{j\theta}$の形で位相を考える際に弧度法を使うので，ここでも弧度法を使います．

前回，前々回の位相の説明では，現場でよく使われる度数法で説明しました．しかし今回は上記の理由により弧度法で表記します．

ところで，「式(6-1)のように，cos関数への入力変数を$2\pi ft$とすれば，目的の波形になるの？」と思うかと思います．**表6-1**に**図6-1**(**a**)との関係も含めて，確認として例を示しておきましょう．**表6-1**と**図6-1**で$f$は周波数［Hz］，$t$は経過時間［ms］です．これらの関係から$\theta=2\pi ft$でcosの角度(位相量)になることがわかります．

またサイン波を使わずに，コサイン波を使うのは理由があります．以下で説明していきますが，ここでは「そういうものなのね」と思ってもらえればOKです．

## ● 位相は二つの波形の時間的な位置ずれだ

さて，**図6-1**(**a**)の交流電圧波形$v(t)$がゼロ・レベルを下から上に横切るところを基準として考えます．❷から❶までを弧度法と度数法で目盛りをつけてみます．位置❶から過去の時間に向かって目盛りを振っていきます．

### ▶同じ周期の電流波形を重ねて考えてみる

**図6-1**(**a**)の電圧波形$v(t)$に，**図6-1**(**b**)のように，時間的に位置ずれした同じ周期の電流波形$i_1(t)$と$i_2(t)$を，重ね合わせてみます．

$i_1(t)$は，❸のところでゼロ・レベルを下から上に横切っています．このとき位置❸は$+\pi/6$ radになります．基準波形$v(t)$と比較して，$i_1(t)$は時間的に先にゼロ・レベルを横切るので，時間的に先に動いていると言え，「$\pi/6$ rad (30°)進んでいる」と表現します．これが位相です．

$i_2(t)$の❹は，❸と時間的に逆の関係で「$\pi/6$ rad (30°)遅れている」といいます．進み/遅れは$\pi$ rad (180°)を境にします．

それぞれ式で示すと，次のとおりです．

$$i_1(t)=\sqrt{2}\times0.20\times\cos(2\pi50t+\pi/6)\ [\mathrm{A}]\cdots(6-2)$$

$$i_2(\mathrm{t})=\sqrt{2}\times0.33\times\cos(2\pi50t-\pi/6)\ [\mathrm{A}]\cdots(6-3)$$

ここで0.20 A，0.33 Aは電流波形$i_1(t)$，$i_2(t)$の実効値です．このように式というのは，**図6-1**(**b**)の波形の**動き/形を記号で示しているだけ**なのです．

### ▶位相は2πftにただ足し算になるだけ

式(6-2)と式(6-3)のカッコの中を見てください．なお$2\pi50t=2\pi ft$［rad］です．位相$\pm\pi/6$ radは，$2\pi ft$の項にただ足されるだけです．つまりカッコの中はすべて角度/位相で，$2\pi ft$の項でさえも角度量/

**表6-1　2π*ft*で目的の波形が出せることを確認する**

周波数 $f$ = 50 Hz(周期にすれば20 ms)

| $t$ | $ft(=50\times t)$ | $2\pi ft$ | $\cos(2\pi ft)$ | **図6-1**の位置 |
|---|---|---|---|---|
| 0 ms | 0 | 0 | 1 | ① |
| 2.5 ms | 0.125(1/8) | $\pi/4$ | $\sqrt{2}$ | ② |
| 5 ms | 0.25(1/4) | $\pi/2$ | 0 | ③ |
| 7.5 ms | 0.375(3/8) | $3\pi/4$ | $-\sqrt{2}$ | ④ |
| 10 ms | 0.5(1/2) | $\pi$ | $-1$ | ⑤ |
| 12.5 ms | 0.625(5/8) | $5\pi/4$ | $-\sqrt{2}$ | ⑥ |
| 15 ms | 0.75(3/4) | $3\pi/2$ | 0 | ⑦ |
| 17.5 ms | 0.875(7/8) | $7\pi/4$ | $\sqrt{2}$ | ⑧ |
| 20 ms | 1 | $2\pi$ | 1 | ⑨ |

### π，2π，3π，4π…

タイトルのように位相の数字自体としては，どんどん大きくなる値を考えることができます．一方で角度というものを(度数法で)考えると，359°の次はゼロですね．位相も角度と同じですから，

$\pi/2\Rightarrow\pi/2$，$\pi\Rightarrow\pi$，$3\pi/2\Rightarrow3\pi/2$，
$2\pi\Rightarrow0$，$5\pi/2\Rightarrow\pi/2$，$3\pi\Rightarrow\pi$，
$7\pi/2\Rightarrow3\pi/2$，$4\pi\Rightarrow0$

と2π radを境にゼロに戻り，結局は0～2π radの間を繰り返し通っているだけということです．

そのため0～2π radの間だけを考えていけば十分だと言えますし，実際問題としてもその区間しかないのです(群遅延や位相遅延など，わざと2πを越えて表現する場合もある．しかし波形の動き自体は何ら変わりない)．

**極形式**(極座標)▶信号の大きさと位相を，円形の基準線を使って，大きさを中心からの距離，位相を中心から右側の方向をゼロとし反時計方向の角度として，一つの点で表したもの．