2輪車の操縦士を数式で表す

第4章　カルマン・フィルタのプログラミングIII　現代制御理論の基礎

第1節

2輪車のふるまいを状態方程式で表す

● 最適制御の理解を目指す

本章では，**図1**の流れで「現代制御理論」(modern control theory)について解説します．現代制御理論の特徴は，複数の値を同時に扱えることです．これは，1つの入出力しか扱えない古典制御理論とは対照的です．また，この複数の値を同時にフィードバックすることを「状態フィードバック」といいます．状態フィードバックで使うフィードバック・ゲインを効率良く求める手法は，「最適制御」と呼ばれています．本章の最終目標は，最適制御を理解することです．

■ 状態方程式

● 微分方程式

制御の対象となるシステム(ロボットや電気回路など)の挙動は，何らかの「微分方程式」(differential equation)によって表されます．例えば，物体の動きを記述する「運動方程式」は，次のような2階の微分方程式です．

$$m = \frac{d^2x}{dt^2} = F \cdots\cdots (1)$$

微分方程式は，ものごとの「変化」を表すものです．変化の原因や，その原因によって生じる変化の大きさを知ることができます．1ステップごとの変化が分かれば，それを積み重ねる(積分する)ことで，すべての動きを導き出すことができます．

● 線形微分方程式

微分方程式の中でも，x^2，x^3，や $\sin(x)$，$\cos(x)$といった非線形な項を含まないものを「線形微分方程式」(linear differential equation)といいます．関数$x(t)$に関する線形微分方程式は，定数係数a_n，a_{n-1}，…，a_0および定数bを使って次のように表せます(本来a_kおよびbはtの関数でもかまいませんが，ここでは定数の場合だけを考えます)．

$$a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 x^{(1)}(t) + a_0 x(t) = b \cdots (2)$$

第3章「力学」では，倒立振子が従う運動方程式を求めました．倒立振子の運動方程式を「線形近似」したものは，上式と同じ形式になっています．

世の中のほとんどのシステムは「非線形」な微分方程式で支配されていますが，これらを「線形近似」すれば，実用的な精度を維持したままで線形微分方程式の議論に帰着させることができます．

「現代制御理論」は，線形微分方程式で記述されたシステムを扱う枠組みです．このようなシステムを「線形システム」(linear system)といいます．

● 行列微分方程式

“$\ddot{x}(t) + a_1\dot{x}(t) + a_0 x(t) = b$” という2階の線形微分方程式があったとします．この微分方程式は，次のように2つの式に分けて表現することができます．

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x = \dot{x} \\ \dfrac{d}{dt}\dot{x} = \ddot{x} = -a_1\dot{x} - a_0 x + b \end{cases} \cdots\cdots (3)$$

ここで$(x,\ \dot{x})$という変数のまとまり(ベクトル)を意識すると，上式は次のように表現できます．

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \cdots\cdots (4)$$

上式はもともと2階の微分方程式ですが，上式のように行列を使って表記すると，「$(x,\ \dot{x})$というベクトルに関する1階の微分方程式」と見なすことができます．このような微分方程式は，「行列微分方程式」(matrix differential equation)と呼ばれます．

もしn階の微分方程式を表したい場合は，次のようなn次元ベクトル “$\boldsymbol{x}$” を考えることになります．

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x^{(1)}(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \cdots\cdots (5)$$

上式のベクトル$\boldsymbol{x}$に対して，係数行列を “A”，定数ベクトルを “$\boldsymbol{b}$” とすると，行列微分方程式は次のように表せます．

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b} \cdots\cdots (6)$$

上式が，一般的な行列微分方程式の表現となります．なお，上式のベクトル$\boldsymbol{x}(t)$としては，次のように異なる種類の関数 “$x_1(t)$” および “$x_2(t)$” を混ぜても構いません．

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \dot{x}_1(t) \\ x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} \cdots\cdots (7)$$

● 状態方程式

現代制御理論では，次のような線形の連立微分方程程

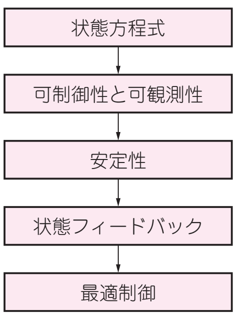

図1　本章の流れ
最適制御について理解することを目指す