

第1節

並進と回転を運動方程式で表す
「古典力学」

■ 倒立振子のモデル作成を目指す

本章では、図1の流れにしたがって「力学」(mechanics)の内容を解説します。力学を学ぶと、物体の動き方を理解したり予測したりできるようになります。まずは基本的な「ニュートンの運動方程式」から始めて、「オイラーの回転運動方程式」や「ラグランジュの運動方程式」を導出します。最後に、本特集で製作する倒立振子の物理モデルを作ります。

■ ニュートンの運動方程式

● 位置、速度、加速度

図2のように、3次元空間の中に物体があったとします。この物体の位置を表すために、原点から物体に向かってベクトル“ $r(t)$ ”を伸ばします。

このベクトル $r(t)$ は「位置ベクトル」(position vector)と呼ばれます。通常、物体の位置は時々刻々と変化します。よって、ベクトル r を時間 t の関数として次のように定義します。なお、 $x(t)$ 、 $y(t)$ 、 $z(t)$ は物体の座標を表すスカラー関数です。

$$r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \dots\dots\dots (1)$$

位置ベクトル r を時間 t で微分したものを「速度」(velocity)といい、“ $v(t)$ ”で表します。なお、今後は時間 t で微分した関数の上に「ドット」を付けて、“ $\dot{r}(t)$ ”などと表します。

$$v(t) = \frac{d}{dt} r(t) = \dot{r}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} \dots\dots\dots (2)$$

速度ベクトル $v(t)$ の絶対値は「速さ」(speed)と呼ばれます。

$$v(t) = |v(t)| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \dots\dots\dots (3)$$

速度 $v(t)$ をさらに時間 t で微分したものを「加速度」(acceleration)といい、“ $a(t)$ ”で表します。

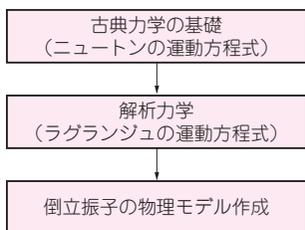


図1 本章の流れ
倒立振子の物理モデル作成を目指す

$$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{r}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix} \dots\dots\dots (4)$$

● ニュートンの運動方程式

物体の加速度、すなわち速度の時間変化率は、その物体に印加される「力」(force) “ F ”によって生じます。また、加速度の大きさはその物体の「質量」(mass) “ m ”の大きさに反比例します。この事実、次の「ニュートンの運動方程式」(Newton's equation of motion)によって表現されます。

$$m \frac{d^2 r(t)}{dt^2} = F \dots\dots\dots (5)$$

上式は、 x 方向、 y 方向、 z 方向の3成分の運動をベクトルの形でまとめて書いています。

● 運動量

運動方程式を次のように変形します。なお、物体の質量 m は時間変化しないとします。

$$\frac{d}{dt} \{mv(t)\} = F \dots\dots\dots (6)$$

上式は、力 F によって“ $mv(t)$ ”という量が増えることを意味しています。この“ $mv(t)$ ”を「運動量」(momentum)と呼びます。運動量は一般的に“ $p(t)$ ”と表記されます。運動量 $p(t)$ を使うと、運動方程式は次のように表記できます。

$$\frac{d}{dt} p(t) = F \dots\dots\dots (7)$$

● 運動量と力積

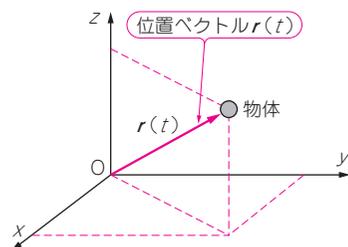
運動方程式を時間“ t ”で積分します。なお、力 F は時刻 $t_1 \leq t \leq t_2$ において一定であるとします。

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} p(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} F dt \dots\dots\dots (8)$$

上式の左辺では $p(t)$ を微分してさらに積分しているので、もとの関数 $p(t)$ に戻ります。右辺の F は定数と仮定しているため、そのまま t を掛け算するだけの形になります。よって、次式が得られます。

$$p(t_2) - p(t_1) = F(t_2 - t_1) = F \cdot \Delta t \dots\dots\dots (9)$$

上式では、時間幅 $t_2 - t_1$ のことを“ Δt ”と表記しています。上式右辺の“ $F \cdot \Delta t$ ”は、「力積」(impulse)



$$r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

図2 物体の位置を表すために、位置ベクトル $r(t)$ を用意する

【セミナー案内】 [実習セミナー] [ビギナー向け] 実習・マイコンC言語の書き方～超入門～ビギナー応援企画！—— 国産16ビット・マイコン搭載ボードでマイコン&C言語の基礎を学ぶ
【講師】 鹿取 祐二 氏, 6/16(日) 22,000円(税込み) <https://seminar.cqpub.co.jp/>