第4章 複素数より現実的…フーリエ変換と「ラプラス変換」で信号解析

「伝達関数」による回路解析入門

瀬川 毅 Takeshi Segawa

この章ではフーリエ級数から発展して，フーリエ変換，ラプラス変換を考えます．

最低限の数学的な「伝達関数」と「ラプラス変換」

フーリエ変換は，

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad \cdots\cdots (1)$$

ラプラス変換は，

$$F(s) = \int_{0}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad \cdots\cdots (2)$$

です．フーリエ変換，ラプラス変換の違いはコラム1を参照していただくとして，回路上の応用面から考えてみます．

フーリエ係数は，ある信号の周波数や波形が与えられたとき，どのような周波数成分をもつのかを計算で求めることでした．それに対して，フーリエ変換やラプラス変換は，変換後に得られるものが連続的な周波数の関数となるので，周波数成分というより周波数特性が求められます．このことをよく表す事例は，伝達関数(transfer function)でしょう．ここでは数学的な部分よりエレクトロニクス寄りの話をします．

● 伝達関数とは何か

いわゆる伝達関数について考えてみましょう．**図1**のように，入力$x(t)$のフーリエ変換を$X(j\omega)$，出力$y(t)$のフーリエ変換を$Y(j\omega)$とすると，伝達関数$H(j\omega)$は，次式で表せます．

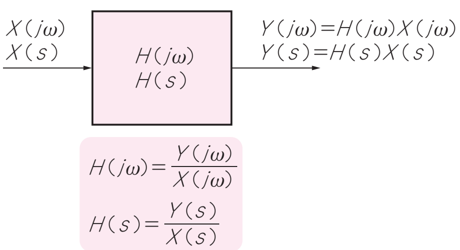

図1　伝達関数は出力/入力

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \quad \cdots\cdots (3)$$

一方，入力$x(t)$のラプラス変換を$X(s)$，出力$y(t)$のラプラス変換を$Y(s)$とすると，伝達関数$H(s)$は次式となります．

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad \cdots\cdots (4)$$

フーリエ変換にせよラプラス変換にせよ，出力の変換された関数を入力の変換された関数で割るのがポイントです．

フーリエ変換で表現する伝達関数もラプラス変換で表現する伝達関数も，カッコの中が$j\omega$かsかの違いだけです．本特集では，フーリエ変換で表現する伝達関数とラプラス変換で表現する伝達関数を厳密に区別しないで扱います．

伝達関数で回路解析①…1次ロー・パス・フィルタ

実際の回路において，入力$x(t)$や出力$y(t)$のフーリエ変換とかラプラス変換を求めることは現実的ではありません．回路の伝達関数は，複素数の電圧，電流を使っても求めることができます．いくつかやってみましょう．

図2は，抵抗RとキャパシタCによる1次のロー・パス・フィルタ(low-pass filter)です．この回路を回路らしく入力電圧のラプラス変換を$V_i(s)$，出力電圧のラプラス変換を$V_o(s)$として，伝達関数を求めてみましょう．道具はキルヒホッフの法則(Kirchhoff's law)です．

キルヒホッフの電圧則をたてると，

$$V_i(s) = \left(R + \frac{1}{sC}\right) I(s) \quad \cdots\cdots (5)$$

$$V_o(s) = \frac{1}{sC} I(s) \quad \cdots\cdots (6)$$

となります．式(6)を式(5)で割ります．