

付録 A3. 式(1)の導出方法

本章では、磁界シミュレーションにより、トランス内の磁束密度分布及び電流密度分布を解析しました。その結果から、漏れ磁束により、巻き線に渦電流損が誘導されていることが分かりました。さらに、渦電流損を算出する理論式を導出することにより、渦電流損を発生させる要素が明確になり、実験(図 6)により、理論式の検証を行いました。これら一連の解析・検証結果は、共振動作に必要な漏れ磁束のトランス内での振舞いを理解する上で、また、トランスの効率改善策を検討する上で、非常に重要と考えます。

以下に、式(1)の導出方法について述べます。

図 5 (b)に示すように、断面が円形で z 軸方向に分布する長さ L 、半径 a の 1 本の銅線があり、 x 軸方向に外部磁界 H_e が鎖交している場合のモデルを考えます。

$$H_e = H_0 i_x \quad (A3-1)$$

銅線の導電率を σ 、透磁率を μ 、時間因子を $e^{j\omega t}$ とします。ベクトルポテンシャル A を考えます。

$$A = A_z(r, \theta) i_z \quad (A3-2)$$

式(A3-3)に示す外部ポテンシャル A_z は、 $r \rightarrow \infty$ では、式(A3-1)で示された磁界を与えます。

$$A_z = \mu_0 H_0 r \sin \theta \quad (\text{付録 A4 参照}) \quad (A3-3)$$

磁束密度を B とすると、式(A3-4)が成り立ちます。

$$B = \text{curl } A \quad (A3-4)$$

電流密度を J 、磁場を H とすると、式(A3-5)が成り立ちます。

$$J = \text{curl } H \quad (A3-5)$$

従って、式(A3-6)が成り立ちます。

$$\text{curl } B = \mu \text{ curl } H = \mu J \quad (A3-6)$$

式(A3-4)の両辺の curl をとると、式(A3-7)が成り立ちます。

$$\text{curl } B = \text{curl curl } A = \text{grad div } A - \nabla^2 A \quad (A3-7)$$

式(A3-6)を式(A3-7)に代入し、纏めると、式(A3-8)が成り立ちます。

$$\mu J = \text{grad div } A - \nabla^2 A \quad (A3-8)$$

V を静電ポテンシャルとすると式(A3-9)が成り立ちます。

$$E = -\text{grad } V - \frac{\partial A}{\partial t} \quad (A3-9)$$

V は、電荷分布から生じますが、準定常電流(変位電流が通常の電流に対して、無視出来る場合)の場合、空間電荷は無いので、 $V=0$ となります。従って、式(A3-9)より、式(A3-10)が成り立ちます。

$$E = -\frac{\partial A}{\partial t} \quad (A3-10)$$

クーロンゲージを適用すると、式(A3-11)となります。

$$\text{div } A = 0 \quad (A3-11)$$

従って、式(A3-8)に、式(A3-11)を代入すると、式(A3-12)が成り立ちます。

$$\mu J = -\nabla^2 A \quad (A3-12)$$

又、電界を E とすると、式(A3-13)が成り立ちます。

$$J = \sigma E \quad (A3-13)$$

式(A3-10)を式(A3-13)に代入すると、式(A3-14)が成り立ちます。

$$J = -\sigma \frac{\partial A}{\partial t} \quad (A3-14)$$

式(A3-14)を式(A3-12)に代入し、整理すると、式(A3-15)が成り立ちます。

$$\nabla^2 A = \mu \sigma \frac{\partial A}{\partial t} \quad (A3-15)$$

式(A3-2)に示すベクトルポテンシャル A を円筒座標系で表し、 A の z 成分を算出すると式(A3-16)になります。

$$\begin{aligned} (\nabla^2 A)_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial A_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \quad \nearrow 0 \\ &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial A_z}{\partial r} + r \frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial A_z}{\partial \theta^2} \\ &= \frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial A_z}{\partial \theta^2} \end{aligned} \quad (A3-16)$$

式(A3-15)、式(A3-16)より、式(A3-17)が成り立ちます。

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial A_z}{\partial \theta^2} = \mu \sigma \frac{\partial A_z}{\partial t} \quad (A3-17)$$

ここで、

$$A_z = A_{z0} e^{j\omega t} \quad (A3-18)$$

と置くと、式(A3-19)が成り立ちます。

$$\frac{\partial A_z}{\partial t} = j\omega A_{z0} e^{j\omega t} = j\omega A_z \quad (\text{A3-19})$$

式(A3-19)を式(A3-17)に代入し、纏めると、式(A3-20)が成り立ちます。

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial A_z}{\partial \theta^2} = j\omega \mu \sigma A_z \quad (\text{A3-20})$$

式(A3-20)は、波動方程式です。境界条件を用いて、変数分離法を用いて解きます。その際、先に銅線外($r > a$)の波動方程式を求めて、式(A3-20)を解く為の境界条件を求めます。

銅線外であるので、式(A3-21)が成り立ちます。

$$J=0 \quad (\text{A3-21})$$

式(A3-21)を式(A3-12)に代入すると、式(A3-22)が成り立ちます。

$$\nabla^2 A=0 \quad (\text{A3-22})$$

式(A3-14)、式(A3-17)、式(A3-21)より、式(A3-23)が成り立ちます。

$$\left(\nabla^2 A\right)_z = \frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial A_z}{\partial \theta^2} = 0 \quad (\text{A3-23})$$

式(A3-23)を、変数分離法を用いて解きます。式(A3-23)の解 A_z を式(A3-24)に示す様に定義します。

$$A_z \triangleq P(\theta)R(r) \quad (\text{A3-24})$$

式(A3-24)をそれぞれ、偏微分すると、式(A3-25)～式(A3-27)を得ます。

$$\frac{\partial A_z}{\partial r} = P \frac{\partial R}{\partial r} \quad (\text{A3-25})$$

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} = P \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} \quad (\text{A3-26})$$

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial \theta^2} = R \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} \quad (\text{A3-27})$$

式(A3-25)～式(A3-27)を式(A3-23)に代入し、纏めると式(A3-28)が成り立ちます。

$$\frac{1}{P} \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} = - \left(r^2 \frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + r \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial r} \right) \triangleq -l^2 \quad (\text{A3-28})$$

但し、式(A3-28)において、

$\frac{1}{P} \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2}$ と $- \left(r^2 \frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + r \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial r} \right)$ は、独立しており、両辺が等しくなる為には、定数($-l^2$)である必要があります。従って、式(A3-29)、式(A3-30)を解くことになります。

$$\frac{1}{P} \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} = -l^2 \quad (\text{A3-29})$$

$$r^2 \frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + r \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial r} = l^2 \quad (\text{A3-30})$$

式(A3-29)の解は、式(A3-31)になります。

$$P(\theta) = A \cos(l\theta) + B \sin(l\theta) \quad (\text{A3-31})$$

境界条件により、式(A3-31)の定数(A 、 B 、 l)を求めます。境界条件を当てはめます。

式(A3-3)に示す外部ポテンシャル A_z は、 $r \rightarrow \infty$ の時です。式(A3-32)に示す様に、式(A3-24)に式(A3-31)を代入し、それが、式(A3-3)に等しくなると考えます。

$$\begin{aligned} A_z = P(\theta)R(r) &= (A \cos(l\theta) + B \sin(l\theta))R(r) \\ &= \mu_0 H_0 r \sin \theta \end{aligned} \quad (\text{A3-32})$$

式(A3-32)が、成立つ為には、式(A3-33)が成り立つ必要があります。

$$l=1, A=0 \quad (\text{A3-33})$$

従って、式(A3-31)は、式(A3-34)となります。

$$P(\theta) = B \sin \theta \quad (\text{A3-34})$$

次に、式(A3-30)を解きます。

両辺に R をかけて r^2 で割り、整理すると式(A3-35)が成り立ちます。

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} - \frac{l^2}{r^2} R = 0 \quad (\text{A3-35})$$

式(A3-33)より、 $l=1$ であるので、式(A3-35)は、式(A3-36)となります。

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} - \frac{1}{r^2} R = 0 \quad (\text{A3-36})$$

式(A3-36)を変形すると、式(A3-37)が得られます。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} - \frac{1}{r^2} R &= \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(R \frac{1}{r} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{r} R \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A3-37})$$

式(A3-37)を解くと、式(A3-38)が導かれます。

$$R = Gr + \frac{H}{r} \quad (\text{A3-38})$$

従って、 $r > a$ の時の式(A3-23)の解は、式(A3-24)に式(A3-34)及び式(A3-38)を代入して、式(A3-39)を得ます。

$$A_z = \left(Gr + \frac{H}{r} \right) B \sin \theta \quad (\text{A3-39})$$

但し、 G, H, B は定数であるので、改めて、式(A3-40)としました。

$$A_z = \left(Gr + \frac{H}{r} \right) \sin \theta \quad (r > a) \quad (\text{A3-40})$$

ここで、もとに戻り、銅線内($r \leq a$)の波動方程式(A3-20)を変数分離法によって解きます。

式(A3-20)の解を式(A3-41)に示す様に定義します。

$$A_z = A_z(r, \theta) \triangleq R(r)P(\theta) \quad (\text{A3-41})$$

式(A3-41)を式(A3-20)に代入すると、式(A3-42)が成り立ちます。

$$P \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + P \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{r^2} R \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} = j\omega\mu\sigma R P = -\lambda^2 R P \quad (\text{A3-42})$$

但し、式(A3-43)に示す様に定義します。

$$-\lambda^2 = j\omega\mu\sigma \quad (\text{A3-43})$$

式(A3-42)の両辺を PR で割り、整理すると、式(A3-44)が成り立ちます。

$$\frac{1}{P} \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} = - \left(\lambda^2 r^2 + r \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial r} + r^2 \frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} \right) \triangleq -k^2 \quad (\text{A3-44})$$

式(A3-44)において

$$\frac{1}{P} \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} \text{と} - \left(\lambda^2 r^2 + r \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial r} + r^2 \frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} \right) \text{は、独立しており、両辺が}$$

等しくなる為には、定数($-k^2$)である必要があります。

従って、式(A3-45)、式(A3-46)を解くことになります。

$$\frac{1}{P} \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} = -k^2 \quad (\text{A3-45})$$

$$\lambda^2 r^2 + r \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial r} + r^2 \frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} = k^2 \quad (\text{A3-46})$$

式(A3-45)の解は、式(A3-47)になります。

$$P(\theta) = C \cos(k\theta) + D \sin(k\theta) \quad (\text{A3-47})$$

境界条件により、式(A3-47)の定数(C, D, k)を求めます。境界条件を当てはめます。

回転方向 θ に関するベクトルポテンシャル A_z は、 $r = a$ の境界条件では、式(A3-40)になります。

つまり式(A3-48)に示す様に、式(A3-41)に式(A3-47)を代入し、それが、式(A3-40)と等しくなります。

$$A_z = R(r)P(\theta) = R(r)(C \cos(k\theta) + D \sin(k\theta)) \quad (\text{A3-48})$$

$$= \left(Gr + \frac{H}{r} \right) \sin \theta$$

式(A3-48)が成立つ為には、式(A3-49)が成立つ必要があります。

$$C=0, \quad k=1 \quad (\text{A3-49})$$

従って、式(A3-50)が成り立ちます。

$$P(\theta) = D \sin \theta \quad (\text{A3-50})$$

次に式(A3-46)を解きます。式(A3-46)に $k=1$ を代入し、式(A3-46)の両辺に R を掛けて両辺を r^2 で割って、整理すると式(A3-51)が得られます。

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + \left(\lambda^2 - \frac{1}{r^2} \right) R = 0 \quad (\text{A3-51})$$

式(A3-52)に示す様に、 z を定義すると、 r は、式(A3-53)に示す様になります。

$$z \triangleq \lambda r \quad (\text{A3-52})$$

$$r = \frac{z}{\lambda} \quad (\text{A3-53})$$

式(A3-54)、式(A3-55)に示す様に変形します。

$$\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r} = \lambda \frac{\partial R}{\partial z} \quad (\text{A3-54})$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial R}{\partial r} \right) = \lambda \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right) = \lambda \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right) \frac{\partial z}{\partial r} = \lambda^2 \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \quad (\text{A3-55})$$

式(A3-53)～式(A3-55)を式(A3-51)に代入し、整理すると式(A3-56)を得ます。

$$\frac{\partial^2 R}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial R}{\partial z} + \left(1 - \frac{1}{z^2} \right) R = 0 \quad (\text{A3-56})$$

式(A3-56)の解は、式(A3-57)に示す様に、1次の第1種ベッセル関数 $J_1(z)$ となることが知られています。

$$R = J_1(z) = z^m \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m+1} m! (m+1)!} z^{2m} \quad (\text{A3-57})$$

従って、波動方程式(A3-20)の解は、式(A3-41)に式(A3-50)と式(A3-57)を代入することにより、式(A3-58)が得られます。

$$A_z = D J_1(z) \sin \theta \quad r \leq a \quad (\text{A3-58})$$

次に、定数 D, G, H を次に示す境界条件(i)、(ii)より求めます。

(i) $r = a$ では、接線方向の磁界成分 H_θ が連続及び法線方向の磁束密度 B_r が連続

(ii) $r \rightarrow \infty$ では、式(A6-3)に示す外部磁界と一致する

必要があります。ここで、 \mathbf{B} を式(A3-59)に示す様に表します。

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= B_r \mathbf{i}_r + B_\theta \mathbf{i}_\theta + B_z \mathbf{i}_z = \mu (H_r \mathbf{i}_r + H_\theta \mathbf{i}_\theta + H_z \mathbf{i}_z) = \text{curl } \mathbf{A} \\ &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \mathbf{i}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \mathbf{i}_\theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{i}_z \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} \mathbf{i}_r - \frac{\partial A_z}{\partial r} \mathbf{i}_\theta\end{aligned}\quad (\text{A3-59})$$

式(A3-59)から H_θ は、式(A3-60)に示す様に表されます。

$$H_\theta = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial r} \quad (\text{A3-60})$$

$r \leq a$ においては、 A_z は、式(A3-58)で表されるので、式(A3-58)を式(A3-60)に代入し、変形すると、式(A3-61)を得ます。

$$\begin{aligned}H_\theta &= -\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial r} \{D J_1(z) \sin \theta\} = -\frac{D \lambda}{\mu} \frac{\partial}{\partial (\lambda r)} \{J_1(z) \sin \theta\} \\ &= -\frac{D \lambda}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \{J_1(z) \sin \theta\} = -\frac{D \lambda}{\mu} J_1'(z) \sin \theta \quad r \leq a\end{aligned}\quad (\text{A3-61})$$

また、 $r > a$ においては、 A_z は、式(A3-40)で表されるので、式(A3-40)を式(A3-60)に代入し、変形すると、式(A3-62)を得ます。

$$\begin{aligned}H_\theta &= -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_z}{\partial r} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial r} \left(G r + \frac{H}{r} \right) \sin \theta \\ &= -\frac{1}{\mu_0} \left(G - \frac{H}{r^2} \right) \sin \theta\end{aligned}\quad (\text{A3-62})$$

また、式(A3-59)から、 B_r は、式(A3-63)に示す様に表されます。

$$B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} \quad (\text{A3-63})$$

$r \leq a$ においては、 A_z は、式(A3-58)で表されるので、式(A3-58)を式(A3-63)に代入し、整理すると、式(A3-64)を得ます。

$$B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \{D J_1(z) \sin \theta\} = \frac{D}{r} J_1(z) \cos \theta \quad (\text{A3-64})$$

また、 $r > a$ においては、 A_z は、式(A3-40)で表されるので、式(A3-40)を式(A3-63)に代入すると式(A3-65)を得ます。

$$B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \left(G r + \frac{H}{r} \right) \sin \theta \right\} = \left(G + \frac{H}{r^2} \right) \cos \theta \quad (\text{A3-65})$$

ここで境界条件を当てはめます。 $r \rightarrow \infty$ では、外部磁界と一致するので、式(A3-40)は、式(A3-3)と等しくなり、式(A3-66)が成り立ちます。 $r \rightarrow \infty$ であるので、 $\frac{H}{r}$ の項は、ゼロになります。

$$\left(G r + \frac{H}{r} \right) \sin \theta = \mu_0 H_0 r \sin \theta \quad (\text{A3-66})$$

従って、定数 G は、式(A3-67)で表されます。

$$G = \mu_0 H_0 \quad (\text{A3-67})$$

G が求まったので、式(A3-40)、式(A3-62)、式(A3-65)それぞれに、式(A3-67)を代入すると、式(A3-68)～式(A3-70)を得ます。

$$A_z = \left(\mu_0 H_0 r + \frac{H}{r} \right) \sin \theta \quad (r > a) \quad (\text{A3-68})$$

$$H_\theta = -\frac{1}{\mu_0} \left(\mu_0 H_0 - \frac{H}{r^2} \right) \sin \theta \quad (r > a) \quad (\text{A3-69})$$

$$B_r = \left(\mu_0 H_0 + \frac{H}{r^2} \right) \cos \theta \quad (r > a) \quad (\text{A3-70})$$

また、境界条件として、 $r=a$ では、接線方向の磁界成分 H_θ が連続であるので、式(A3-61)と式(A3-69)が等しくなり、式(A3-71)が成り立ちます。

$$-\frac{\lambda D}{\mu} J_1'(\lambda a) \sin \theta = -\frac{1}{\mu_0} \left(\mu_0 H_0 - \frac{H}{a^2} \right) \sin \theta \quad (\text{A3-71})$$

銅の透磁率 $\mu \cong \mu_0$ であるので、以降 $\mu_0 = \mu$ として算出します。式(A3-71)より、 H を求めると式(A3-72)を得ます。

$$H = a^2 (\mu H_0 - D \lambda J_1'(\lambda a)) \quad (\text{A3-72})$$

次に法線方向の磁束密度成分 B_r が、 $r=a$ で連続であるので、式(A3-64)と式(A3-65)が等しくなり、式(A3-73)が成り立ちます。

$$\frac{D}{a} J_1(\lambda a) \cos \theta = \left(\mu H_0 + \frac{H}{a^2} \right) \cos \theta \quad (\text{A3-73})$$

式(A3-73)から、 H を求めると式(A3-74)を得ます。

$$H = D a J_1(\lambda a) - a^2 \mu H_0 \quad (\text{A3-74})$$

H は、式(A3-72)で求まっており、式(A3-74)に代入し、 D を求めますと、式(A3-75)を得ます。

$$D = \frac{2 a \mu H_0}{J_1(\lambda a) + a \lambda J_1'(\lambda a)} \quad (\text{A3-75})$$

ここで、ベッセル関数の微分公式(A3-76)を当てはめます。

$$J'_1(\lambda a) = J_0(\lambda a) - \frac{J_1(\lambda a)}{\lambda a} \quad (\text{A3-76})$$

式(A3-76)の両辺に λa を掛けて整理すると、式(A3-77)を得ます。

$$J_1(\lambda a) + \lambda a J'_1(\lambda a) = \lambda a J_0(\lambda a) \quad (\text{A3-77})$$

式(A3-77)を式(A3-75)に代入し纏めると、式(A3-78)を得ます。

$$D = \frac{2\mu H_0}{\lambda J_0(\lambda a)} \quad (\text{A3-78})$$

式(A3-78)を式(A3-72)に代入し、 H を求めると、式(A3-79)を得ます。

$$H = a^2 \mu \left(H_0 - \frac{2H_0}{J_0(\lambda a)} J'_1(\lambda a) \right) \quad (\text{A3-79})$$

ここで、微分公式(A3-80)を当てはめます。

$$J'_n(\lambda a) = \frac{1}{2} (J_{n-1}(\lambda a) - J_{n+1}(\lambda a)) \quad (\text{A3-80})$$

式(A3-80)において、 $n = 1$ とすると式(A3-81)を得ます。

$$J'_1(\lambda a) = \frac{1}{2} (J_0(\lambda a) - J_2(\lambda a)) \quad (\text{A3-81})$$

式(A3-81)を式(A3-79)に代入し纏めると、式(A3-82)を得ます。

$$H = \frac{a^2 \mu H_0 J_2(\lambda a)}{J_0(\lambda a)} \quad (\text{A3-82})$$

次に外部磁界による銅線の渦電流損 P_L を求めます。

銅線表面から、銅線内部に入り込むパワーフロー $\overline{P_P}$ は、ポインティングベクトル \mathbf{P} を用いて、式(A3-83)より計算されます。

なお、 \oint は、銅線表面における面積分を表します。

$$\begin{aligned} \overline{P_P} &= - \oint \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} ds = - \frac{1}{2} \oint E_z \mathbf{i}_z \times H_0^* \mathbf{i}_\theta \cdot \mathbf{i}_r ds \\ &= - \frac{1}{2} \oint E_z H_0^* (-\mathbf{i}_r) \cdot \mathbf{i}_r ds \\ &= \frac{1}{2} \oint E_z H_0^* ds = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} E_z H_0^* L a d\theta \\ &= \frac{1}{2} a L \int_0^{2\pi} E_z H_0^* d\theta \end{aligned} \quad (\text{A3-83})$$

ここで、電界 E_z は、次に示す様に表されます。式(A3-84)が成り立ちます。

$$\begin{aligned} \text{curl } \mathbf{E} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} - \frac{\partial E_\theta}{\partial z} \right) \mathbf{i}_r + \left(\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) \mathbf{i}_\theta + \\ &\quad \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{i}_z \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} \mathbf{i}_r - \frac{\partial E_z}{\partial r} \mathbf{i}_\theta \end{aligned} \quad (\text{A3-84})$$

また、式(A3-85)が成り立ちます。

$$\text{curl } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{A3-85})$$

式(A3-59)、式(A3-84)、式(A3-85)より、式(A3-86)が成り立ちます。

$$\frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} \mathbf{i}_r - \frac{\partial E_z}{\partial r} \mathbf{i}_\theta = - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} \mathbf{i}_r - \frac{\partial A_z}{\partial r} \mathbf{i}_\theta \right) \quad (\text{A3-86})$$

式(A3-18)を式(A3-86)に代入すると式(A3-87)を得ます。

$$E_z = -j\omega A_z \quad (\text{A3-87})$$

式(A3-58)を式(A3-87)に代入し、式(A3-88)を得ます。

$$E_z = -j\omega D J_1(z) \sin \theta \quad (\text{A3-88})$$

式(A3-88)と式(A3-43)より、式(A3-89)を得ます。

$$E_z = \frac{\lambda^2}{\mu \sigma} D J_1(z) \sin \theta \quad (\text{A3-89})$$

また、式(A3-89)に、式(A3-78)を代入すると、式(A3-90)を得ます。

$$E_z = \frac{2\lambda H_0}{\sigma J_0(\lambda a)} J_1(z) \sin \theta \quad (\text{A3-90})$$

また、式(A3-61)に、式(A3-78)を代入し、 H_0 を求めると、式(A3-91)を得ます。

$$H_0 = - \frac{2H_0}{J_0(\lambda a)} J'_1(z) \sin \theta \quad (\text{A3-91})$$

式(A3-90)及び式(A3-91)において、 $z = a$ として、式(A3-83)に代入し、纏めると、式(A3-92)を得ます。

$$\begin{aligned} \overline{P_P} &= - \frac{2\pi a L \lambda H_0^2 J_1(\lambda a) J'_1(\lambda^* a)}{\sigma J_0(\lambda a) J_0(\lambda^* a)} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \\ &= - \frac{2H_0^2 a L \lambda J_1(\lambda a) J'_1(\lambda^* a)}{\sigma |J_0(\lambda a)|^2} \end{aligned} \quad (\text{A3-92})$$

銅線の渦電流損 P_L は、式(A3-93)により、算出されます。

$$P_L = \text{Re}\{\overline{P_P}\} = - \frac{2\pi L}{\sigma} |H_0|^2 \text{Re} \left\{ \lambda a \frac{J_1(\lambda a) J'_1(\lambda^* a)}{|J_0(\lambda a)|^2} \right\} \quad (\text{A3-93})$$

式(A3-93)を計算し、銅線の単位体積あたりの渦電流損

P_{LI} を求めると、式(4-1)が導出されます。

$$P_{\text{LI}} = \frac{P_{\text{L}}}{\pi a^2 L} = \frac{\pi}{2} (\pi a^2) f^2 \mu^2 \sigma |H_0|^2 \quad (4-1)$$

付録 A4. 式(A3-3)の求め方

下記の図 A4-1 を参照にして、式(A3-60)に、式(A4-1)を代入し整理すると、式(A4-2)を得ます。

$$H_{\theta} = -H_0 \sin \theta \quad (A4-1)$$

$$\frac{\partial A_z}{\partial r} = \mu_0 r \sin \theta \quad (A4-2)$$

式(A4-2)の両辺を、 r で積分すると、式(A3-3)が得られます。

$$A_z = \mu_0 H_0 r \sin \theta \quad (A3-3)$$

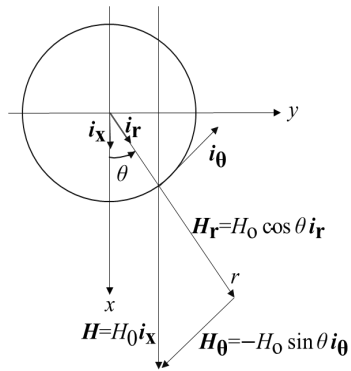


図 A4-1. 各磁界成分