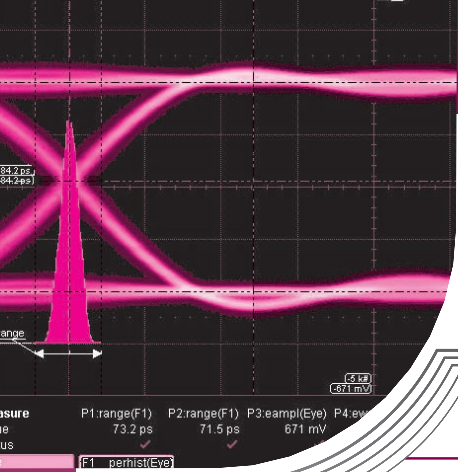

位相雑音とジッタの関係を数式で導く

位相雑音とジッタの関係を探る(後編)

國頭 延行　*Nobuyuki Kunito*

前編(本誌2009年2月号，pp.178 - 185)では，位相雑音の定義を解説し，信号周波数のゆらぎをどのように定量化しているのかを説明しました．位相雑音は，理想正弦波(キャリア)に対してさまざまな周波数成分を持つ時間方向の揺らぎ(位相変調)が加わった程度を定量化したもの，と考えることができました．

そこで，話を簡単にするために，単一周波数による位相変調を考えてみます．この場合，変調された信号は簡単な数式で表せるので，位相雑音とジッタの両方をそれほど苦労なく求められます．

この結果を検討すると，位相雑音とジッタの関係を数式で表せます．こうして得られた数式を使えば，オシロスコープで測定したジッタを元に位相雑音を計算できます．〈編集部〉

位相変調を数式で表す

位相変調，すなわち意図的に「位相雑音」を加えた信号を数式で表現し，その式を元にして表計算ソフトウェアでどのような波形が発生するか，まずはパソコン上で見てみます．

その後，位相変調機能を持つシンセサイズド・ファンクション・ジェネレータで，位相変調のかかった信号を実際に発生させ，ジッタ解析ソフトウェアを搭載したディジタル・オシロスコープを使って観測し，表計算ソフトウェアで求めた理論値と一致するかどうかを検証していきたいと思います．

● 位相変調された信号はどのような時間波形になるか

まず，理想正弦波に位相変調がかかった場合の理論的な式を立ててみましょう．

基準発振器の周波数を f_c(キャリア周波数)，位相変調成分を $\phi(t)$ とすると，位相変調成分を持つ信号源は式(11)のように表現できます．

$$V(t) = V_c \cos\{2\pi f_c t + \phi(t)\} \qquad \cdots\cdots(11)$$

具体的な例を考えるに当たり，前編で用いた仮定，$V_c = 0.5\text{V}$，$f_c = 100\text{kHz}$ は変えないこととします．分かりやすくするために，変調成分である $\phi(t)$ は，単一の周波数を持つ正弦波であることを前提とし，変調周波数 f_m を5 kHzとします．さらに位相変動量 $\Delta\phi$ を10°と設定します．位相変動量は，キャリア信号 f_c の1周期360°のうち，最大で10°の位相変化量があるという意味です．時間で考える場合は，周期を T として式(12)で変換できます．

$$\Delta\phi = T\frac{10°}{360°} \qquad \cdots\cdots(12)$$

この $\Delta\phi$ を使って $\phi(t)$ を表すと，

$$\phi(t) = \Delta\phi \sin(2\pi f_m t) \qquad \cdots\cdots(13)$$

この式(13)を式(12)に代入してまとめると，

$$V(t) = V_c \cos\{2\pi f_c t + \Delta\phi \sin(2\pi f_m t)\} \qquad \cdots\cdots(14)$$

となります．

では具体的な計算を行いましょう．キャリア信号周波数 f_c が100 kHzですから，周期 $T = 10\ \mu\text{s}$ です．位相変動量が10°の場合の $\Delta\phi$ は約278 nsとなります．表計算ソフトウェアで式(14)を計算させる場合，$\Delta\phi$ の単位はラジアンである必要があるので，式(15)を使って変換しておきます．

$$\Delta\phi_{radian} = 2\pi\frac{10°}{360°} \qquad \cdots\cdots(15)$$

これまでの条件をすべて式(14)に代入してまとめると，

$$V(t) = 0.5 \times \cos\{2\pi \times 100\text{kHz} \times t + 2\pi\frac{10°}{360°}\sin(2\pi \times 5\text{kHz} \times t)\} \qquad \cdots\cdots(16)$$

となります．

この式を表計算ソフトウェアに