

個別部品で組み立てて動作原理から設計法までを理解する PLL 周波数シンセサイザの設計法徹底解説 第21回 フィルタの定数と過渡応答特性

小宮 浩
Hiroshi Comiya

過渡応答特性に優れたPLLを作るためには、ループ・フィルタの設計が重要です。今回は、伝達関数から過渡応答を求める方法を解説したのち、ラグ・フィルタとラグ・リード・フィルタを組み込んだPLLの過渡応答を計算で求めてみます。

PLLの過渡応答特性を 数式で求める

SPICE系のシミュレータ(PSpiceなど)を用いることで、PLLが閉じたループになっているときの時間軸特性を見ることはできますが、ここでは次のような手順で過渡応答特性を調べることで、より理解を深めたいと思います。

- ① PLLの開ループの伝達関数(s の関数)を求め、そこから閉ループの伝達関数を求める
- ② 閉ループ伝達関数に入力信号を加えてラプラス逆変換し、 t の関数で表現された出力周波数を得る
- ③ 減衰係数 ζ と非減衰固有角周波数 ω_N を与えて過渡応答特性を描く

ラプラス変換や複素数など、数学的な知識については記しませんので、専門書などを参照してください。

PLLの過渡応答を求める手順を例を用いながら説明します。

簡単な例でPLLの伝達関数を 求めてみる

PLLをブロック線図に置き替え、入出力の伝達関数を求めていきます。

● 最も簡単なラグ・フィルタの場合で考える

図21-1(a)にPLLのモデルを示します。

まずは、ループ・フィルタに伝達関数が最も簡単になる(数式が単純で計算しやすい)ラグ・フィルタを用いた場合を考えます。

図21-1(b)が書き換えたブロック線図です。

● まずは開ループ伝達関数を求める

このブロック線図から、PLLの開ループでの伝達関数 $P_{open}(s)$ を求めます。図のXのポイントでループを切ったときの入出力特性ですから、次式となります。

$$P_{open}(s) = G(s)H(s) = \frac{K}{N} \frac{F(s)}{s} \dots\dots\dots(21-1)$$

ただし、 $K = K_P K_V$ 、 K_P :位相比較器のゲイン [V/rad]、 K_V :VCOの変換ゲイン [(rad/s)/V] ラグ・フィルタの伝達関数 $F(s)$ は次式となります。

$$F(s) = \frac{1}{sT_1 + 1} \dots\dots\dots(21-2)$$

ただし、 $T_1 = C_1 R_1$

式(21-1)と式(21-2)から開ループ伝達関数 $P_{open}(s)$ は次式で表されます。

$$P_{open}(s) = \frac{K}{N} \frac{1}{s(sT_1 + 1)} = \frac{K}{N} \frac{1}{s^2 T_1 + s}$$

$$\therefore P_{open}(s) = \frac{K_P K_V}{N} \frac{1}{s^2 C_1 R_1 + s} \dots\dots\dots(21-3)$$

● 開ループ伝達関数から閉ループ伝達関数を求める

PLLの閉ループ伝達関数 $P_{close}(s)$ を求めます。

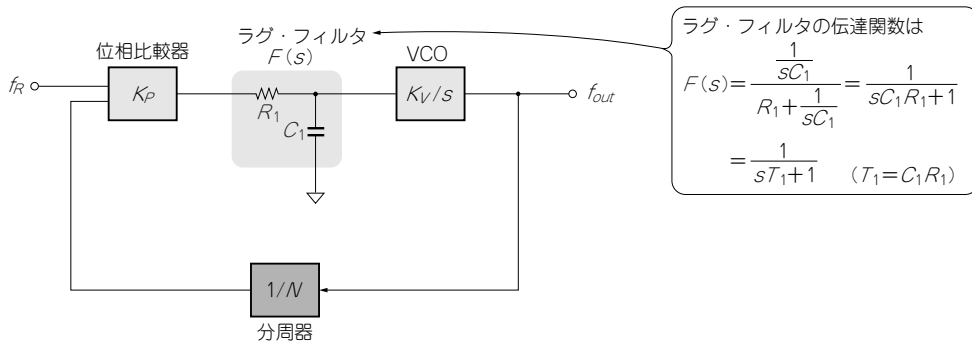
先に求めた開ループ伝達関数 $G(s)H(s)$ から、次式のように表されます。

$$P_{close}(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

$$= \frac{\frac{KF(s)}{s}}{1 + \frac{K}{N} \frac{F(s)}{s}} \dots\dots\dots(21-4)$$

同様にラグ・フィルタの伝達関数 $F(s)$ をこれに代入して解くことで式(21-5)を導くことができます。

$$P_{close}(s) = \frac{\frac{K}{s^2 T_1 + s}}{1 + \frac{K}{N} \frac{1}{s^2 T_1 + s}} = \frac{\frac{K}{T_1}}{s^2 + \frac{s}{T_1} \frac{K}{NT_1}}$$

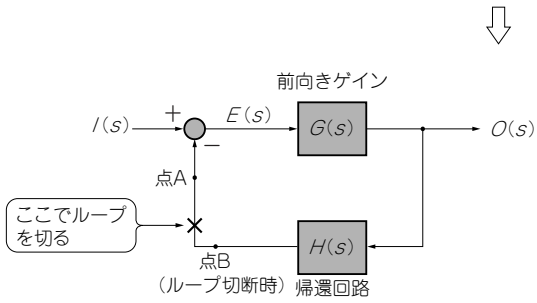


ラグ・フィルタの伝達関数は

$$F(s) = \frac{1}{sC_1 R_1 + 1} = \frac{1}{sC_1 R_1 + 1}$$

$$= \frac{1}{sT_1 + 1} \quad (T_1 = C_1 R_1)$$

(a) ラグ・フィルタによる2次型PLLモデル



開ループ伝達関数 $P_{open}(s)$ は点Aから点Bまでのゲインなので、
 $P_{open}(s) = G(s)H(s)$
 閉ループ伝達関数 $P_{close}(s)$ を求めるにはまず出力 $O(s)$ を考える。
 $O(s) = G(s)E(s)$
 $= G(s)\{I(s) - B(s)\}$
 $= G(s)\{I(s) - O(s)H(s)\}$
 $= G(s)I(s) - G(s)O(s)H(s)$
 $O(s)\{1 + G(s)H(s)\} = G(s)I(s)$
 $\therefore P_{close}(s) = \frac{O(s)}{I(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$

(b) PLLのブロック線図

図 21-1 PLLモデルをブロック線図で考えて閉ループ伝達関数を求める
 フィルタの伝達関数、開ループ伝達関数から閉ループ伝達関数が求まる

$$\therefore P_{close}(s) = \frac{\frac{K_p K_v}{C_1 R_1}}{s^2 + \frac{1}{C_1 R_1} s + \frac{K_p K_v}{N C_1 R_1}} \dots\dots\dots (21-5)$$

● 伝達関数から周波数特性を求める

伝達関数 (sの関数) のsを $j\omega$ に置き換えることで、ゲインと位相の周波数応答を求めることができます。

式(21-3)の開ループ伝達関数で $s \rightarrow j\omega$ に置換しポード線図に表すことで、開ループにおけるゲイン周波数特性と位相周波数特性の関係が分かります。

PLL負帰還回路の安定性は、開ループ・ゲインが1倍となるカットオフ周波数 f_c での位相が -180° よりどのくらい余裕があるかを目安にできます。

開ループ伝達関数から周波数応答を求めるだけで、安定性を確かめられることになります。

これまで、開ループ伝達特性はS-NAPシミュレータを用いて解いてきましたが、机上の計算で良いことになります。

伝達関数から過渡応答を求める

時間軸の過渡応答特性を調べるには、式(21-5)の開ループ伝達関数をラプラス逆変換して、sの関数からtの関数に戻すことになります。

閉ループ伝達関数 $P_{close}(s)$ に入力信号 $X(s)$ を加えた出力信号 $Y(s)$ は次式で表されます。

$$Y(s) = P_{close}(s)X(s) \dots\dots\dots (21-6)$$

この式をラプラス逆変換すれば、入力信号 $x(t)$ を与えた場合の過渡応答 $y(t)$ となる次式を得られます。

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} [P_{close}(s)x(s)] \dots\dots\dots (21-7)$$

ただし、 \mathcal{L}^{-1} はラプラス逆変換を表す

入力信号 $X(s)$ として与える関数の形によって、過渡応答特性 $y(t)$ は異なります。

● 周波数を切り替える＝ステップ応答

PLLでは、周波数を変更する場合の過渡応答特性が重要です。例えば、250 MHzから300 MHzに周波数をステップしたときに、どのような過渡応答特性になるかということです。

PLLの過渡応答はステップ応答で、入力信号 $x(t)$ として単位ステップ関数を与えることになります。